数理解析研究所講究録
69巻 1969年 35-52

粘性圧縮流の差分解法

航空宇宙技術研究所 三好 甫

§ 1

一次元非定常Navier-Stokes方程式

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho}{\partial t} + u\frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\
&\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\gamma\rho}\frac{\partial}{\partial x}(\rho T) = \frac{4}{3}\frac{1}{Re\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (1.1) \\
&\frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} + (\gamma-1)T\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{4}{3}\frac{\gamma(\gamma-1)}{Re\rho}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 = \frac{\gamma}{\sigma}\frac{1}{Re\rho}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}
\end{aligned}
$$

の差分法による数値計算法について述べる。この方程式は又

$$
\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(f + S') \qquad (1.2)
$$

と保存形でかける。ここで

$$
W = \begin{pmatrix} \rho \\ m \\ E \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} -m \\ -\left(\frac{m^2}{\rho}+p\right) \\ -\frac{m}{\rho}(E+p) \end{pmatrix}, \quad S' = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4}{3}\frac{1}{Re}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{m}{\rho}\right) \\ \frac{1}{Re}\left[\frac{\gamma}{\sigma}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{E}{\rho}-\frac{1}{2}\left(\frac{m}{\rho}\right)^2\right]+\frac{4}{3}\left[\frac{m}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{m}{\rho}\right)\right]\right] \end{pmatrix}
$$

後の使用のため $\frac{\partial S'}{\partial x} = S$ とおく。

ここで ρ, u, T はそれぞれ流体の密度, 速度, 温度を表し, Re, σ はそれぞれレイノルズ数, プラントル数である。又, $E=\rho\left(\frac{T}{\gamma(\gamma-1)}+\frac{1}{2}u^2\right)$, $p=(\gamma-1)\left(E-\frac{1}{2}\rho u^2\right)$, $m=\rho u$ である。

一次元非定常 Navier-Stokes 方程式（以下 N-S eq と略す。）に差分法を適用した例としては I. Yu. Brailovskaya [1], S. M. Scala & P. Gordon [2], L. F. Fillar & H. F. Ludloff [3], J. Gary [4], [5], E. L. Rubin & S. Z. Burstein [6], H. U. Thommen [7] がある。ここでは安定性を中心に N-S eq の差分法について考えることにする。

以下、$f_{i,j}=f(i\Delta x, j\Delta t)$ の様に表わし、前進差分商, 後退差分商, 中心差分商, 2階の中心差分商をそれぞれ f_x, $f_{\bar{x}}$, $f_{\mathring{x}}$, $f_{x\bar{x}}$ と表わす。

Fillar & Ludloff は弱い衝撃波を含む $Re=32$ の流れに対して N-S eq の一階導関数を後退差分商で、二階導関数を二階の中心差分商でおきかえる差分法を提案し、その安定条件を

$$\Delta t \leq \Delta x \Big/ \left(u+a+\frac{2\gamma}{\sigma}\frac{1}{Re\rho\Delta x}\right) \tag{1.3}$$

$$\frac{\gamma}{\sigma}\frac{1}{Re\rho\Delta x} \gg a\big|_{u=0} \quad \left(\text{実際計算では } \frac{\gamma}{\sigma Re\rho\Delta x} \geq \frac{3}{2}a\big|_{u=0}\right) \tag{1.4}$$

としている。ここで $a=\sqrt{T}$ である。(1.4) は Re が大きいと Δx は小さく取る必要があることを示している。しかしながらこの差分法は (1.3), (1.4) の条件のもとでも後に示す衝撃波管の問題に対しては不安定性を示すことが数値実験の結果確かめられる。

J. GaryはN熱伝導性を無視したN-SeqにLax-Wendroff の差分法を適用した。彼は差分法の安定条件として経験的に

$$\Delta t \leq \mathrm{Min}\left(\frac{\Delta x}{u+a} , \frac{1}{2}\frac{3}{8\gamma} Re\, \rho \Delta x^2 \right) \tag{1.5}$$

を与えている。

E.L.Rubin & S.Z. Bursteinおよび H.U. Thommen は (1.2) の N-Seqに 2-Step Lax-Wendroff 差分法を適用した。

$$\overline{W}_{i+\frac{1}{2},j+1} = \frac{1}{2}(W_{i+1,j}+W_{i,j}) + \frac{\Delta t}{\Delta x}(f_{i+1,j}-f_{i,j}) + \frac{\Delta t}{2}(S_{i+1,j}+S_{i,j}) \tag{1.6}$$

$$W_{i,j+1} = W_{i,j} + \frac{1}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x}\left[\frac{1}{2}(f_{i+1,j}-f_{i-1,j}) + \overline{f}_{i+\frac{1}{2},j+1} - \overline{f}_{i-\frac{1}{2},j+1}\right] + \Delta t\, S_{i,j} \tag{1.7}$$

この差分法の安定条件は Rubin & Burstein によれば

$$\Delta t \leq \mathrm{Min}\left(\frac{\Delta x}{u+a} , \Delta t_c \right) \tag{1.8}$$

である。ここでΔt_cは (1.6); (1.7) に small perturbation を導入して得られた線型化方程式の作る行列の固有値の絶対値を1以下に押える最大のΔtの値である。この固有多項式は複雑な3次方程式になるので彼等は計算機で固有値を計算した。

以上の安定性に関する結果からN-Seqに対する差分法においてΔxを固定して定まる差分方程式の安定性は放物的および双曲的な安定条件に従うことが明かとなる。

次に各種の差分法の安定性に関する数値実験を衝撃波管の問題に関して行なった結果を示す。（次頁の注参照）

問題 1（衝撃波管）

初期条件　　$u(x,0) = 0$; $0 \leq x \leq 1$

$$T(x,0)=1\ ; \quad 0\le x\le 1$$

$$\rho(x,0)=1\ ; \quad 0\le x\le 0.4 \quad , \quad \rho(x,0)=0.02\ ; \quad 0.4\le x\le 1$$

境界条件

$$u(0,t)=u(1,t)=0 \quad , \quad \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0}=\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=1}=0$$

用いた差分法は

(1) Lax-Wendroff の差分法

ρ についてだけ scheme をかくと

$$\rho_{i,j+1}=\rho_{i,j}+\Delta t(\rho_t)_{i,j}+\frac{\Delta t^2}{2}(\rho_{tt})_{i,j} \qquad (1.9)$$

ここで ρ_t, ρ_{tt} は (1.1) を用いて

$$(\rho_t)_{i,j}=-(u\rho_{\hat{x}}+\rho u_{\hat{x}})_{i,j} \qquad (1.10)$$

$$(\tilde{\rho}_t)_{i,j}=-(u\rho_{\bar{x}}+\rho u_{\bar{x}})_{i,j} \qquad (1.11)$$

$$(\rho_{tt})_{i,j}=-(\rho_t u_{\hat{x}}+\rho(\tilde{u}_t)_x+u_t\rho_{\hat{x}}+u(\tilde{\rho}_t)_x)_{i,j} \qquad (1.12)$$

(2) 2-step Lax-Wendroff の差分法

(1.6) および (1.7)

(3) Friedricks-Lax の差分法

(1.2) に対して

$$w_{i,j+1}=\frac{1}{2}(w_{i+1,j}+w_{i-1,j})+\frac{1}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x}(f_{i+1,j}+S'_{i+1,j}-f_{i-1,j}-S'_{i-1,j}) \qquad (1.13)$$

(1.1) 又は (1.2) に関する放物的および双曲的安定条件[注)]はそれぞれ $\frac{3}{8r}Re\rho\Delta x^2$ および $\frac{\Delta x}{u+a}$ である。

注) 安定条件が $\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\le const$ となるものを放物的安定条件, $\frac{\Delta t}{\Delta x}\le const$ となるものを双曲的安定条件と仮称しておく。

差分法	Re	ΔX	$10^3\Delta t$ 安定	$10^3\Delta t$ 不安定	$10^3\frac{\Delta x}{u+a}$	$10^3\frac{3}{8\gamma}Re\rho\Delta x^2$	
(1)	10^5	0.01	2.25	2.375	3.226	53.57	安定な場合でも衝撃波の背後に大きな振動が生ずる
	10^4	0.01	2.125	2.25	3.501	5.357	上に同じ
	10^3	0.01	0.546875	0.5625	3.673	0.5357	安定な場合良い解を与える。
	10^2	0.01	0.05	0.055	4.201	0.05357	上に同じ
	10	0.01	0.005	0.005625	6.162	0.005357	安定な場合でも大きな振動を生ずる。
(2)	10^5	0.01	—	1.0	—	—	
	10^4	0.01	3.625	3.75	3.898	5.357	安定な場合でも衝撃波の背後に大きな振動を生ずる。
	10^3	0.01	0.5		3.676	0.5357	安定な場合良い解を与える。
	10	0.01	0.005		6.25	0.005357	安定な場合でも振動が生ずる。
(3)	10^6	0.005	0.5	5.0	2.02	133.92	滑らかな解を与える。
	10^3	0.005	0.1	0.5	2.77	0.13392	上に同じ

上の表で $\frac{\Delta x}{u+a}$, $\frac{3}{8\gamma}Re\rho\Delta x^2$ は $t=0.2$ 迄の値のうち最も厳しい値を取った。不安定というのは $t=0.2$ 迄に解が overflow をするかまたは ρ, T が負になることをいう。2-step-Lax-Wendroff 法で $Re=10^6$, 10^5 の場合 Δt を小さくしても安定な解は得られなかった。Friedrichs-Lax 法において $Re=10$ の場合 安定な Δt は存在するが解は const になってしまう。

§2.

前節で実験を行なつた差分法は全て非粘性超音速流に適用されてきたものばかりである。実験の結果から見るとこれらの差分法は万全であるとはいいがたい。一方、N-S e_q に対する差分方程式は双曲的な性質だけでなく放物的な性質も併せ持つているという事実がある。これらの理由から以下の節では放物型方程式 $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ に対する差分法の基礎にたつていくつかの差分法を構成し、その安定性について解析し、実験を行うことにする。

放物型方程式 $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ に対しては通常 explicit scheme と implicit scheme の両者が同程度に用いられているが、ここでは前者についてだけ考えることにする。

---

implicit scheme を考慮しなかつた理由は下記のとおりである。

(1)、二次元非定常問題之の応用を考える場合、それから生ずる large Scale の非線型連立方程式の解法は容易ではないこと。

(2)、非粘性 ($R_e \to \infty$) の場合に(1)で述べた困難をさけるために implicit な差分法を種々変形（線型化、三角化 etc）する試みがあるが得られた差分法は必ずしも無条件安定ではない (J. Gary)。

(3)、強い衝撃波を含む問題に適用された implicit な差分法の解には大きな Overshoot, undershoot が現われ、その処理が問題となる。（J. Gary, J. Turner & B. Wendroff 参照）

次の差分法を考える。

$$\rho_t + u\rho_{\hat{x}} + \rho u_{\hat{x}} = 0$$

$$u_t + u u_{\hat{x}} + \frac{1}{\gamma\rho}(\rho T)_{\hat{x}} = \frac{4}{3}\frac{1}{Re\rho} u_{x\bar{x}} \tag{2.1}$$

$$T_t + uT_{\hat{x}} + (\gamma-1)Tu_{\hat{x}} - \frac{4}{3}\gamma(\gamma-1)\frac{1}{Re\rho}u_{\hat{x}}^2 = \frac{\gamma}{\sigma}\frac{1}{Re\rho}T_{x\bar{x}}$$

および

$$\rho_t + u\rho_{\bar{x}} + \rho u_{\hat{x}} = 0, \quad (u \geq 0)$$

$$u_t + u u_{\bar{x}} + \frac{1}{\gamma\rho}(\rho T)_{\hat{x}} = \frac{4}{3}\frac{1}{Re\rho}u_{x\bar{x}}, \quad (u \geq 0) \tag{2.2}$$

$$T_t + uT_{\bar{x}} + (\gamma-1)Tu_{\hat{x}} - \frac{4}{3}\gamma(\gamma-1)\frac{1}{Re\rho}u_{\hat{x}}^2 = \frac{\gamma}{\sigma}\frac{1}{Re\rho}T_{x\bar{x}}, \quad (u \geq 0)$$

(2.2)で $u<0$ の場合 $\rho_{\bar{x}}$, $u_{\bar{x}}$, $T_{\bar{x}}$ はそれぞれ ρ_x, u_x, T_x に代える。

(2.1)の差分法を非粘性超音速流に適用すると不安定となることから（small perturbation による誤差解析から明か）(2.1)は ΔX を固定した場合に十分大きな Re をもつ流れに対しては不安定となることが予想される。(2.1)に small perturbation を導入し誤差解析を行なうと small perturbation $\tilde{\rho}$, $\tilde{u}$, $\tilde{T}$ に関する線型方程式は

$$\begin{pmatrix} \tilde{\rho}^{j+1} \\ \tilde{u}^{j+1} \\ \tilde{T}^{j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-i\lambda uB, & -i\lambda\rho B, & 0 \\ -\frac{i\lambda TB}{\gamma\rho}, & 1-i\lambda uB-2\lambda\beta A, & -\frac{i\lambda B}{\gamma} \\ 0, & -(\gamma-1)i\lambda TB, & 1-i\lambda uB-2\gamma\lambda\beta A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\rho}^{j} \\ \tilde{u}^{j} \\ \tilde{T}^{j} \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

となる。ここで $\sigma = 0.75$ とおいた。$\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}$, $\beta = \frac{4}{3Re\rho\Delta x}$, $\sin\theta = B$, $(1-\cos\theta) = A$ である。この行列の固有値は

$$\tau_1 = 1 - i\lambda uB - 2\lambda\beta A \tag{2.4}$$

$$\tau_{2,3} = 1 - i\lambda u B - \lambda\gamma\beta A \pm \lambda(\gamma^2\beta^2A^2 - a^2B^2)^{\frac{1}{2}} \tag{2.5}$$

(2.4) および (2.5) から (2.1) の差分法が安定であるためには

$$\Delta t \leq \frac{3}{8\gamma} Re\, \rho \Delta X^2 \quad (2\lambda\gamma\beta \leq 1 \text{ より}) \tag{2.6}$$

$$|u| + a \ll \frac{4\gamma}{3 Re\, \rho \Delta X} \tag{2.7}$$

(2.7) は Re を固定すれば

$$\Delta X \ll 4\gamma / 3(|u|+a) Re\, \rho \tag{2.8}$$

ΔX を固定すれば

$$Re \ll 4\gamma / 3(|u|+a) \rho \Delta X \tag{2.8'}$$

問題 A において $\Delta X = 0.01$, 0.005 に対応する (2.8)' は理論値を用いればそれぞれ $Re \ll 3300$, $Re \ll 6600$ となる。[注] (2.1) の差分法の問題 A を用いての数値実験の結果は以下の表に示す。

Re	ΔX	$10^4 \Delta t$	$10^4 \mathrm{Min} \frac{\Delta X}{u+a}$	$10^4 \mathrm{Min} \frac{3}{8\gamma} Re\, \rho \Delta X^2$	解の状況
10^5	0.005	0.1	(17.8)	133.9	$t=0.27994$ で不安定
4×10^3	0.01	5.0	(17.8)	21.43	$t=0.14$ で不安定
3×10^3	0.01	5.0	(17.8)	16.07	安定 ($t=0.3$迄)
10^3	0.01	5.75	(17.8)	5.375	不安定
10^3	0.01	5.5	17.61	5.375	安定 ($t=0.3$迄)
10^2	0.01	0.54375	(17.8)	0.5375	不安定
10^2	0.01	0.540625	(17.8)	0.5375	安定 ($t=0.3$迄)
10	0.005	0.05	(17.8)	0.01339	$t=0.0009$ で不安定
10	0.005	0.01	33.8	0.01339	安定 ($t=0.3$迄)

前頁の表中 $\frac{\Delta x}{u+a}$ の( )は非粘性の場合の理論値である。数値実験の結果では(2.8)'の代りに $Re < 4\gamma/3(|u|+a)\rho\Delta x$ としても良い様である。従って(2.7)の代りに $|u|+a < 4\gamma/3Re\rho\Delta x$ として実用上良い様である。

(2.2)の(2.3)に対応する線型方程式は

$$\begin{pmatrix} \tilde{\rho}^{j+1} \\ \tilde{u}^{j+1} \\ \tilde{T}^{j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda u(A+iB), & -i\lambda\rho B, & 0 \\ -\frac{i\lambda TB}{\gamma\rho}, & 1-\lambda u(A+iB)-2\lambda\beta A, & -\frac{i\lambda B}{\gamma} \\ 0 & -i(\gamma-1)\lambda TB, & 1-\lambda u(A+iB)-2\lambda\sigma\beta A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\rho}^{j} \\ \tilde{u}^{j} \\ \tilde{T}^{j} \end{pmatrix} \qquad (2.9)$$

$u<0$ に対応する方程式は対角要素の $1-\lambda u(A+iB)$ を $1-\lambda u(-A+iB)$ に代えたものである。$K=1-\lambda u(A+iB)$ $(u\geq 0)$ または $K=1-\lambda u(-A+iB)$ とおくと上の行列の固有値は

$$\tau_1 = K-2\lambda\beta A, \quad \tau_{2,3} = K-\lambda\sigma\beta A \pm \lambda(\sigma^2\beta^2A^2 - a^2B^2)^{\frac{1}{2}} \qquad (2.10)$$

である。$|\tau_{1,2,3}|\leq 1$ なるための条件は2つの場合に分けて考えなければならない。

i) $\sigma\beta \geq a$ の場合 $|\tau_{1,2,3}|\leq 1$ なるための条件は

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{\left(|u| + \frac{8\gamma}{3Re\rho\Delta x}\right)} \qquad (2.11)$$

である。

ii) $\sigma\beta<a$ の場合, $|\tau_{2,3}|\leq 1$ なるための条件は $u, \rho, T, \Delta x, Re$ の複雑な関係である。そこで u, ρ, T を種々の値に固定し Re を変化させて $|\tau_{1,2,3}|\leq 1$ となる Δt の上限の値 $\underbrace{\text{を}}_{\Delta t_c}$ 計算機で計算させる($\Delta x=0.01$ とした。)。その結果

a) $r\beta \ll a$ の場合、すなわち $Re\to$大 としてゆくと Δt_c の値は β に無関係に u と a に依存して一定値に近ずく。

b) $r\beta < a$ の全ての Re の値に対して Δt_c は $\frac{\Delta x}{u+a}$ の値の $\frac{1}{4}$〜$\frac{2}{3}$ の間にあった。

以上の結果より (2.2) の差分法は任意の Re の値に対して安定な解を計算できることが予想される。又 Re を任意に固定した場合 $\Delta x\to$小 とすれば常に $r\beta \geq a$ とできることに注意する必要がある。次に問題 A を用いて (2.2) の差分法の安定性に関する数値実験を行なった結果を表に示す。($\Delta x=0.01$)

Re	$10^3\Delta t$	$\mathrm{Max}\lvert\tau\rvert$	$10^3\,\mathrm{Min}\frac{\Delta x}{u+a}$	$10^3\,\mathrm{Min}\frac{3}{8\gamma}Re\,\rho\,\Delta x^2$	解の状況
10	0.0053125	1.0	8.4	0.005357	安定
10	0.00546875	1.04	9.0	0.005357	不安定 (477 step)
10^2	0.05375	1.006 〜1.0	5.1	0.05357	安定
10^2	0.0546875	1.04	5.1	0.05357	不安定 (850 step)
10^3	0.5	1.0	3.8	0.5357	安定
10^3	0.5625	1.099	3.8	0.5857	不安定 (155 step)
10^4	1.0	1.0	3.5	5.857	安定
10^4	2.75	1.04	3.5	5.357	安定
10^4	2.875	—	—	5.357	不安定 (5 step)
10^5	1.0	1.0	3.5	53.57	安定
10^5	3.23	1.04	3.2	53.57	安定

Re	$10^3\Delta t$	Max|τ|	$10^3 \mathrm{Min}\frac{\Delta x}{u+a}$	$10^4 \mathrm{Min}\frac{3}{8} Re\rho\Delta x^2$	解の状況
10^5	2.25	1.09	—	53.57	不安定（15 step）
10^6	1.0	1.004	2.5	535.7	安定
10^6	2.26	—	—	535.7	安定
10^6	2.28	—	—	535.7	不安定（4 step）

上の表で不安定というのは $Re=10$ の場合 2000 step，$Re=10^2$ の場合 500 step，$Re=10^4$ の場合 300 step，$Re\geq10^5$ の場合 200 step 迄に解に overflow が生ずるか，または ρ，T の値が負になった場合を意味する。また Max|τ| は 5 step ごとに 4 つの量（Max|u|，Max T，Max(|u|+a)，Min ρ となる量）で計算したもの全 step を通じての最大を示す。

この結果では (2.2) により問題 A の安定な解を得るためには $r\beta\geq a$ で (2.11)，$r\beta\ll a$ で $\leq \frac{\Delta x}{u+a}$（Max|τ|≥1 でない）が Δt に対する条件である様に考えられる。またこれらの数値解は衝撃波の背後にわずかな overshoot（$Re\geq10^5$）をもつが前節の差分法の解に生じた様な振動はもたないことも同時に明かになる。[注]

8頁の注　非粘性の場合の理論値を用いて |u|+a を計算した。

11頁の注　Δx→小とするとこの overshoot は小さくなる。

§3

§1,2の差分法は Δx を固定して Re→小とするかまたは Re を

固定して$\Delta x\to$小とするとΔtに課せられる安定条件は厳しくなることを示した。この条件を除くために本節では$\frac{\partial u}{\partial t}=a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$に対する非対称な差分法を構成することにする。

先ず$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$に対する次の２つの近似を考える。$0\leq\alpha\leq 1$に対して

$$u_{\tilde{x}x_\alpha}=\frac{1}{\Delta x^2}\left[\alpha(u_{i+1,j+1}-u_{i,j+1}-u_{i,j}+u_{i-1,j})+(1-\alpha)(u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j})\right]. \quad (3.1)$$

$$u_{x\tilde{x}_\alpha}=\frac{1}{\Delta x^2}\left[\alpha(u_{i+1,j}-u_{i,j}-u_{i,j+1}+u_{i-1,j+1})+(1-\alpha)(u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j})\right] \quad (3.2)$$

$u_{\tilde{x}x_\alpha}$および$u_{x\tilde{x}_\alpha}$の$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$に対する打ち切り誤差は$A\Delta x^2\pm\alpha B\frac{\Delta t}{\Delta x}$である。$\frac{\partial u}{\partial t}=a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$を$u_t=a u_{x\tilde{x}_\alpha}$または$u_t=a u_{\tilde{x}x_\alpha}$で差分近似した場合、これらの差分法の安定条件は共に

$$\Delta t\leq\frac{\Delta x^2}{2a(1-\alpha)} \quad (3.3)$$

である。(3.3)より、$\alpha=1$のとき差分法は無条件安定、$\alpha=0$のと差分法は通常のExplicitな差分法になることからも明かな様に$\Delta t\leq\frac{\Delta x^2}{2a}$が安定条件である。また$\alpha=\frac{1}{2}$の時$\Delta t\leq\frac{\Delta x^2}{a}$となり$\alpha=0$の時と比較して２倍の有利さとなる。

次に差分法の安定性の性質は保存したままで差分法の精度を向上させる、つまり打ち切り誤差中の$\frac{\Delta t}{\Delta x}$の項を除くことについて考える。$\frac{\Delta t}{\Delta x}$の係数の符号が$u_{\tilde{x}x_\alpha}$と$u_{x\tilde{x}_\alpha}$では逆になっていることから$u_t=u_{\tilde{x}x_\alpha}$による解と$u_t=u_{x\tilde{x}_\alpha}$による解の平均を各stepごとにとれば精度は向上することが期待される。

今、簡単のため$\alpha=1$とする。$N\Delta x=1$，$\frac{\Delta t}{\Delta x^2}=\omega$，$A=\frac{\omega a}{1+\omega a}$ $B=\frac{1-\omega a}{1+\omega a}$とおき、$u_t=a u_{x\tilde{x}_\alpha}$による$(j+1)\Delta t$-levelの解を$u^L_{i,j+1}$

$u_t = a u_{\bar{x}x_\alpha}$ による解を $u^R_{i,j+1}$ とすれば平均法による解 $u_{i,j+1}$ は

$$u^L_{0,j+1} = a \text{ ; 境界条件}$$

$$u^L_{i,j+1} = A(u^L_{i-1,j+1} + u_{i+1,j}) + B u_{i,j} \qquad 1 \le i \le N-1$$

$$= A u_{i+1,j} + (A^2+B)\sum_{k=2}^{i} A^{i-k} u_{k,j} + B A^{i-1} u_{1,j} + A^i u_{0,j+1} \qquad (3.4)$$

$$u^R_{N,j+1} = b \text{ ; 境界条件}$$

$$u^R_{i,j+1} = A(u^R_{i+1,j+1} + u_{i-1,j}) + B u_{i,j} \qquad 1 \le i \le N-1$$

$$= A u_{i-1,j} + (A^2+B)\sum_{k=i}^{N-2} A^{k-i} u_{k,j} + B A^{N-i-1} u_{N-1,j} + A^{N-i} u_{N,j+1} \qquad (3.5)$$

$$u_{i,j+1} = \frac{1}{2}(u^L_{i,j+1} + u^R_{i,j+1}) = \frac{A}{2}(u_{i-1,j} + u_{i+1,j}) + \frac{(A^2+B)}{2}\sum_{k=0}^{N-i-1} A^k (u_{i-k,j} + u_{i+k,j})$$

$$+ \frac{A^2+B}{2}\sum_{k=N-1-i}^{i-2} A^k u_{i-k} + \frac{1}{2}\{ B A^{i-1} u_{1,j} + A^i u_{0,j+1} + B A^{N-i-1} u_{N-1,j} +$$

$$+ A^{N-i} u_{N,j+1} \qquad (3.6)$$

ここで一般性を失なうことなく $i > N-i$ とおいた。(3.6) を (x_i, t_{j+1}) の廻りで Taylor 展開し、$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ および $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = a\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$ を用いれば u, $\Delta x\frac{\partial u}{\partial x}$, $\Delta x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ の係数は 0、$\Delta x^3\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$ の係数 $\Upsilon(\Delta x)$ は

$$\Upsilon(\Delta x) = \frac{1}{2}(a\omega)^2\left[\left(\frac{a\omega}{1+a\omega}\right)^i - \left(\frac{a\omega}{1+a\omega}\right)^{N-i}\right] \qquad (3.7)$$

となる。今 $\lim_{\Delta x \to 0} \Upsilon(\Delta x)/\Delta x = 0$ となることが計算により確かめられるから（但し境界点の適当な近傍を除く）$\Delta x^3\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$ の係数は $\Delta x \to 0$ で $o(\Delta x)$ となり、平均法の精度は Δx が十分小さければ境界点の適当な近傍内の格子点を除いては殆んど通常の explicit な差分法の精度に等しい精度をもつといえる。

§ 4

4.3

前節の差分法をN-S_{eq}に適用する。(2.2)の二階導関数をそれぞれ$u_{\bar{x}\bar{x}\alpha}$および$T_{\bar{x}\bar{x}\alpha}$でおきかえた差分法により得られる$(j+1)$st levelの解をそれぞれ$\rho^{L}_{i,j+1}$, $u^{L}_{i,j+1}$および$T^{L}_{i,j+1}$とし、$u_{\bar{x}x\alpha}$および$T_{\bar{x}x\alpha}$をおきかえて得られる解を$\rho^{R}_{i,j+1}$, $u^{R}_{i,j+1}$および$T^{R}_{i,j+1}$（$\rho^{L}_{i,j+1}=\rho^{R}_{i,j+1}$である。）とすると平均法の解は

$$
\begin{aligned}
\rho_{i,j+1} &= \frac{1}{2}\left(\rho^{L}_{i,j+1}+\rho^{R}_{i,j+1}\right)\\
u_{i,j+1} &= \frac{1}{2}\left(u^{L}_{i,j+1}+u^{R}_{i,j+1}\right)\\
T_{i,j+1} &= \frac{1}{2}\left(T^{L}_{i,j+1}+T^{R}_{i,j+1}\right)
\end{aligned}
\qquad (4.1)
$$

となる。

次に平均法の誤差解析を行なう。先ず(2.2)の$u_{\bar{x}\bar{x}}$, $T_{\bar{x}\bar{x}}$を$u_{\bar{x}\bar{x}\alpha}$, $T_{\bar{x}\bar{x}\alpha}$でおきかえた差分方程式にsmall perturbationを導入するとsmall perturbationに関する線型化方程式は$u\geq 0$の場合，$1-e^{-i\theta}=A$, $i\sin\theta=B$, $\frac{4\lambda}{3Re\rho\Delta x}=\beta$, $\frac{\Delta t}{\Delta x}=\lambda$, $\alpha\beta(1-e^{-i\theta})=c$, $\beta\{2(\cos\theta-1)+\alpha(1-e^{-i\theta})\}=D$とおくと

$$
\begin{pmatrix}\tilde{\rho}^{L}_{i,j+1}\\ \tilde{u}^{L}_{i,j+1}\\ \tilde{T}^{L}_{i,j+1}\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
1-\lambda uA, & -\lambda\rho B, & 0\\
-\frac{\lambda TB}{(1+c)\gamma\rho} & \frac{1-\lambda uA+D}{1+c}, & -\frac{\lambda B}{1+c}\\
0 & -\frac{(\gamma-1)\lambda TB}{1+\gamma c}, & \frac{1-\lambda uA+\gamma D}{1+\gamma c}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}\tilde{\rho}_{i,j+1}\\ \tilde{u}_{i,j+1}\\ \tilde{T}_{i,j+1}\end{pmatrix}
\qquad (4.2)
$$

$u<0$に対応する方程式は(4.2)において$A=e^{i\theta}-1$とおけば得られる。また$u_{\bar{x}x\alpha}$および$T_{\bar{x}x\alpha}$に対応する方程式は(4.2)において$c=\alpha\beta(e^{i\theta}-1)$とおけば得られる。今$1-\lambda uA=F$とおき(4.2)の行列の固有値を$\tau$とすると

$$\tau_1 = F+D \big/ 1+c \qquad (4.\ )$$

$$\tau_{2,3} = \frac{1}{1+\gamma c}\left[F + \frac{\gamma}{2}(Fc+D) \pm \left\{\frac{\gamma^2}{4}(Fc-D)^2 + (1+\gamma c)\lambda^2 T B^2\right\}^{\frac{1}{2}}\right] \qquad (4.4)$$

となる。

$\alpha=1$ の場合 $|\tau_1|\leq 1$ なるためには

$$\lambda|u|(1-\lambda|u|) + 2\beta\left(1+\lambda|u|\left(1-2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)\right) \geq 0$$

であれば良いが、そのためには $\lambda|u|\leq 1$ であれば良い。従って $\alpha=1$ の場合 τ_1 に関しては放物的安定条件はなくなる。$|\tau_{2,3}|\leq 1$ なるための簡単な条件を示すことはできないので $\alpha=0.5,\ 1.0$ に対して $\rho,\ u,\ T,\ Re$ を種々変化させて (4.4) から $|\tau_{2,3}|\leq 1$ なるための Δt の上限 Δt_c を計算機により計算した結果

i) $\gamma\beta > a$ の場合

a) $\alpha=1$

Δt_c は殆んど u のみに依存し、Re および ρ に依存せず放物的な安定条件はおちていると考えられる。

b) $\alpha=0.5$

Δt_c は殆んど $\alpha=0$、すなわち (2.2) の差分法の安定条件の2倍であつて

$$\Delta t_c < \Delta x \Big/ \left(|u| + \frac{4\gamma}{3Re\,\rho\,\Delta x}\right) \qquad (4.5)$$

である。これは前節の $u_t = a u_{x\bar{x}0.5}$ の安定条件から予想されるとおりである。

ii) $\gamma\beta \ll a$

$\alpha=0.5, 1$ に対する Δt_τ の値は $\alpha=0$ の場合の値と殆んど等しい。

iii) $\gamma\beta$ と α が同程度の場合

$$\Delta t_\tau|_{\alpha=1} > \Delta t_\tau|_{\alpha=0.5} > \Delta t_\tau|_{\alpha=0} \qquad (4.6)$$

であって、$\gamma\beta \to$ 小に従って ii) の状況に近ずき、$\gamma\beta \to$ 大に従って i) の状況に近ずく。

この結果、この節の目的であった $\gamma\beta \gg \alpha$ の場合の放物的安定条件の除去が果せたことが明かとなる。次に、問題Aを用いて平均法の安定条件に関する数値実験を行なった結果を示す。

Re	α	安　定	不安定
10	0	0.0000053125	0.00000546875
10	0.5	0.0000 1075	0.00001 0875
10	1.0	0.01	0.0 285
10^2	0	0.00005375	0.0000546875
10^2	0.5	0.000 1110	0.00011125
10^2	1.0	0.00 775	0.007875
10^3	0	0.00055	0.0005625
10^3	0.5	0.0012	0.0013
10^4	1.0	0.004875	0.0045

左の表で不安定というのは $\alpha=0$. 0.5 の場合は §3 と同じ、$\alpha=1$ の場合は 400step 迄に解に overflowが生ずるか ρ, T に負の値が生ずるかする場合をいう。この表では $Re \geq 10^4$ の結果がでていないが $\alpha=0.5, 1.0$ の場合も $\alpha=0$ の場合も同じ結果を与え

た。この実験の結果は誤差解析の結果を支持している。安定条件の改良は $\alpha=1$ の場合に著しい。

文　　献

[1] I. Yu. Brailovskaya ; Soviet Physics Doklady, vol 10. NO2, 1965

[2] S. M. Scala & P Gordon ; The Physics of Fluid vol 9. NO6 ; 1966

[3] L. F. Fellar & H. F. Ludloff ; Math. of compt vol 15 1961

[4] J. Gary ; N.Y.O 9188 1963

[5] J. Gary ; Math of Compt vol 18 1964

[6] E. L. Rubin & S. Z. Burstein ; J of compt. Phys. vol 2 1967

[7] H. U. Thommen, Z. A. M. P. vol 17 1966

[8] J. Turner & B. Wendroff ; LA3007, 1964